مبرهنة التماثل الثالثة:

ليكن A حيز لي مؤوث الحلقات R ، I , J مثاليين في A بحيث $I \subseteq J$ عندئذٍ

$$A/I / J/I \cong A/J$$

البرهان:

نعرف تطبيق علاقة $f : A/I \longrightarrow A/J$

$$\forall a+I \in A/I \;;\; f(a+I) = a+J$$

$$\forall a+I, b+I \in \frac{A}{I} \;;\; a+I = b+I$$

$$(a+I)-(b+I) = I$$

$$=(a-b)+I = I \Rightarrow a-b \in I \subseteq J$$

$$(a-b)+J = J \Rightarrow a+J = b+J$$

$$\Rightarrow f(a+I) = f(b+I)$$

إذا f تطبيق

f هشاكل جبور لي وغامر. مطلوب برهانه

حسب مبرهنة التماثل الأولى

$$A/I / \ker f \cong A/J$$

وأن $\ker f = J/I$ مطلوب برهانه

تمهيدية:

ليكن A جبر لي مؤوث الحلقات R ، I , J مثاليين في A قابلين للحل في A ، عندئذٍ كل من

$$[I, J] \;,\; I \cap J \;,\; I+J$$

مثالي قابل للحل في A.

البرهان:

لدينا كل من $A+J$ ، $I \cap J$ ، $[I, J]$ مثالي في A

لنفرض أن $D^n I = 0$ ، $D^m J = 0$ ، $m, n \in N$

• لدينا $I\cap J \subseteq I \Rightarrow D^n(I\cap J) \subseteq D^n(I) = 0$

$\Rightarrow D^n(I\cap J)=0$

وبالتالي المثالي $I\cap J$ قابل للحل

• لدينا أيضاً $[I,J]\subseteq J$

$D^m[I,J]\subseteq D^m J = 0$

إذاً $[I,J]$ قابل للحل

• لدينا حسب مبرهنة التماثل الثانية

$$\frac{I+J}{I} \cong \frac{J}{I\cap J}$$

بما أن J قابل للحل فإن $\frac{J}{I\cap J}$ قابل للحل

ومنه فإن $\frac{I+J}{I}$ قابل للحل ومنه ~~+I~~ $I+J$ قابل للحل

جذر ال عديمة القوى:

* أهم عناصر في الحلقة ((عناصر جيدة)):
- العناصر القابلة للقلب
- العناصر الجامدة: حيث $a^2=0$ a عنصر جامد
- العناصر القاسمة لعناصر جامدة

* العناصر السيئة في الحلقة:
- عناصر عديمة القوى: $a^n=0$ ، a عديم القوى في جذر جاكوبسون
- العناصر القاسمة للصفر

$J(R/J(R))=0$

حلقة جيدة

$J(M)=M.J(R)$ جذر المودول هو المودول في جذر الحلقة

الموضوع: 1 - 1

تمرين ليكن A مثالي في الحلقة R ولدينا

$CA = A$ لأجل $C^n A$

ولدينا $C^2A = [A, CA]$

$= [A, A]$

$C^3 A = [A, C^2A] = [A, [A, A]]$

$C^4 A = [A, C^3A] = [A, [A, [A, A]]]$

نفرض أنه لأجل العدد $n \in N^*$ صحيح أي تعيين $C^n A$

لدينا

$C^{n+1} A = [A, C^n A]$

$= [A, [A, [A, \dots A]]]$ ($n+1$ مرة)

لأجل كل n نفرض أنه تحديد $C^n A$

مبرهنة: ليكن A مثالي في الحلقة R عندئذ:

1- إذا كان $n \in N^*$ فإن $C^n A$ مثالي مميز في A.

2- $A = CA \supseteq C^2A \supseteq C^3A \supseteq \dots$

متتالية متناقصة من المثاليات المميزة في A.

البرهان:

(1) من أجل $n = 1$ فإن $CA = A$ مثالي مميز

من أجل $n = 2$ فإن $C^2A = [A, CA] = [A, A]$ مثالي مميز

لنفرض $K \in N^*$ فإن $C^K A$ مثالي مميز في A عندئذ

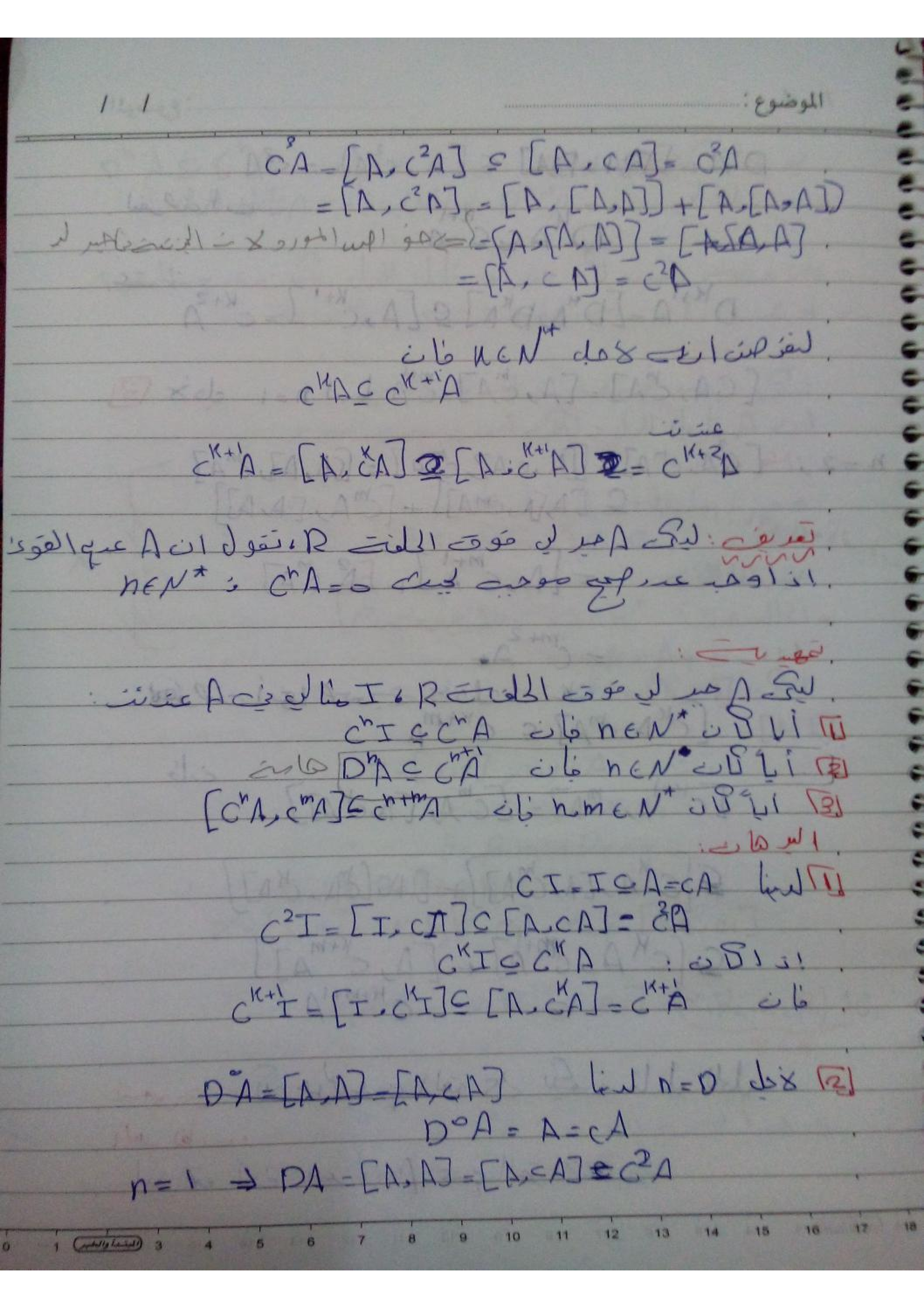
$C^{K+1} A = [A, C^K A]$

وكل من A، $C^K A$ مثالي مميز في A إذا $C^{K+1} A$ مثالي مميز في A

(2) من أجل $n=1$ فإن $CA = A$

من أجل $n = 2$ فإن $C^2A = [A, CA] = [A, A]$

$\subseteq A$



$C^3A = [A, C^2A] \subseteq [A, CA] = C^2A$

$= [A, C^2A] = [A, [A, A]] + [A, [A, A]]$

حسب الساموية لان الجمع جاير له $= [A, [A, A]] = [A, [A, A]]$

$= [A, CA] = C^2A$

لنفرض ان ذلك لاجل $k \in N^*$ فان

$C^kA \subseteq C^{k+1}A$

عندئذ

$C^{k+1}A = [A, C^kA] \supseteq [A, C^{k+1}A] = C^{k+2}A$

تعريف: ليكن A جبر لي فوق الحقل R، نقول ان A عديم القوى اذا وجد عدد صحيح موجب بحيث $C^nA = 0$; $n \in N^*$

تمهيد:

ليكن A جبر لي فوق الحقل R ، I مثالي في A عندئذ:

[1] أيا كان $n \in N^*$ فان $C^nI \subseteq C^nA$

[2] أيا كان $n \in N^*$ فان $D^nA \subseteq C^{n+1}A$ هامة

[3] أيا كان $n, m \in N^*$ فان $[C^nA, C^mA] \subseteq C^{n+m}A$

البرهان:

[1] لدينا $CI = I \subseteq A = CA$

$C^2I = [I, CI] \subseteq [A, CA] = C^2A$

اذا كان: $C^kI \subseteq C^kA$

فان $C^{k+1}I = [I, C^kI] \subseteq [A, C^kA] = C^{k+1}A$

[2] لاجل $n = 0$ لدينا

~~$D^0A = [A, A] = [A, CA]$~~

$D^0A = A = CA$

$n = 1 \Rightarrow DA = [A, A] = [A, CA] \subseteq C^2A$

الموضوع: .... / /

$$D^2A = [DA, DA] \subseteq [A, C^2A] = C^3A$$

لنفرض أن

$$D^kA \subseteq C^{k+1}A$$

عندئذ:

$$D^{k+1}A = [D^kA, D^kA] \subseteq [A, C^{k+1}] = C^{k+2}A$$

(3) لأجل $n=1$ لدينا $[CA, C^mA] = [A, C^mA] = C^{m+1}A$

$n=2$; $[C^2A, C^mA] = [[A, CA], C^mA] = [[A, A], C^mA]$

قانون الدائرة $\subseteq [A, [A, C^mA]] + [C^mA, [A, A]]$

$$= [A, C^{m+1}A] + [A^2, C^mA]$$

$$= C^{m+2}A$$

لنفرض أنها صحيحة لأجل k

$$[C^kA, C^mA] \subseteq C^{k+m}A$$

فإن

$$[C^{k+1}A, C^mA] = [C^mA, [A, C^kA]]$$

$$\subseteq [C^kA, [A, C^mA]] + [A, [C^mA, C^kA]]$$

$$\subseteq [C^kA, C^{m+1}A] + [A, C^{k+m}A]$$

$$= C^{k+m+1}A$$

نتيجة: كل جبر لي عديم القوى يكون قابل للحل

البرهان:

لنفرض أن جبر لي A عديم القوى عندئذ

يوجد $n\in N^*$ بحيث $C^nA=0$ فإن $D^{n-1}A\subseteq C^nA$
وبالتالي $D^{n-1}A=0$ وبالتالي فإن A قابل للحل

ملاحظة: ليس كل جبر لي قابل للحل يكون عديم القوى.
وهذا ما تثبته المبرهنة الآتية:

مبرهنة:
ليكن A جبر لي فوق حقل k بعده 2.
إن A قابل للحل ولكن ليس عديم القوى

البرهان:
وجدنا سابقا أن A قابل للحل.
لتكن $S=\{e_1,e_2\}$ قاعدة للجبر A فوق k.
نميز الحالات:
* الحالة 1: $[e_1,e_2]=\lambda e_1,\ \lambda\in k^*$
إن $CA=A\neq 0$
ليكن $z\in C^2A=[A,CA]$
$=[A,A]$.
عندئذ: $z=[x,y],\ x,y\in A$

$$x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$$
$$y=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2$$

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in k$

$$z=[x,y]=\alpha_1\beta_2[e_1,e_2]+\alpha_2\beta_1[e_2,e_1]$$

$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)[e_1,e_2]=\underbrace{(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\lambda}_{\alpha\in k}e_1$$

$$=\alpha e_1$$

وهذا يبين أن C^2A هو فضاء بعده
$$C^2A=\{\mu e_1,\ \mu\in k\}\neq 0$$

الموضوع: ....

اي أن C^3A فضاء جزئي من A بعده 1 .

ليكن $[A, C^2A] = C^3A \ni z_0$

نجد أن $z_0 = [x_0, y_0]$

$x_0 \in A, \quad y_0 \in C^2A$

$x_0 = \alpha' e_1 + \beta' e_2 \quad ; \alpha', \beta' \in K$

$y_0 = \mu' \cdot e_1 \quad ; \mu' \in K$

$$z_0 = [x_0, y_0] = \beta'\mu'[e_2, e_1] = -\beta'\mu'[e_1, e_2]$$

$$= \underbrace{-\beta'\mu'\lambda}_{\in K} e_1$$

C^3A فضاء جزئي بعده 1 $\quad C^3A = \{ \gamma e_1 ; \gamma \in K \}$

ومنه نجد أن $C^2A = C^3A \neq 0$

نتابع بهذا الشكل نجد أن أيا كان $k \in N^*$ فإن

$C^2A = C^kA \neq 0 \quad \forall k \geq 2$

ومنه فإن A ليس عديم القوى.

بنفس الطريقة نجد أنه إذا كان

$[e_1, e_2] = \theta e_2 \qquad \theta \in K$

فإن جبر لي A ليس عديم القوى.

* الحالة (3)

إذا كان $[e_1, e_2] = \sigma e_1 + \varepsilon e_2$

$\sigma \neq 0, \varepsilon \neq 0 . \quad \sigma, \varepsilon \in K$

ليكن $z \in C^2A$ حيث $[A, A] = C^2A = [A, CA]$

$z = [x, y]$ و $x, y \in A$

الموضوع: .... / /

$x = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2$ $y = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2$

$\sigma_i, \varepsilon_i \in k$

$Z = [x, y] = \sigma_1 \varepsilon_2 [e_1, e_2] + \sigma_2 \varepsilon_1 [e_2, e_1]$

$= (\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1)[e_1, e_2]$

$(\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1)(\sigma e_1 + \varepsilon e_2)$

$= \underbrace{(\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1)\sigma}_{\sigma_0 \in k} e_1 + \underbrace{(\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1)\varepsilon}_{\varepsilon_0 \in k} e_2$

$Z = \sigma_0 e_1 + \varepsilon_0 e_2$ $C^2 A \subseteq \{\sigma e_1 + \lambda e_2\} = A$

ومنه نجد أن C^2A فضاء جزئي بعده 2

أي أن $C^2A = A \neq 0$

$C^3A = A \neq 0$

$C^kA = A \neq 0 \quad , \forall k \in N^*$

وبالتالي فإن A ليس عديم القوى.

نستنتج من المبرهنة السابقة

كل متتالية $A \supseteq CA \supseteq C^2A \supseteq \dots \supseteq C^kA \supseteq$

لا تتقطع وكل حدودها إما يساوي A أو يساوي C^2A في الجبر لي المعرف فوق k والذي بعده 2